

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

## Zadatak OŠ-8.1.

Za koje realne brojeve  $a$  su  $a(3a + 4)$  i  $(a - 1)(a + 1)$  dva uzastopna cijela broja?

### Rješenje.

Neka je

$$m = a(3a + 4) = 3a^2 + 4a \quad 1 \text{ bod}$$

$$n = (a - 1)(a + 1) = a^2 - 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Brojevi  $m$  i  $n$  su dva uzastopna cijela broja ako je  $m = n + 1$  ili  $m = n - 1$ .

**Prvi slučaj.** Neka je  $m = n + 1$ , tj.  $3a^2 + 4a = a^2 - 1 + 1$ . 1 bod

Sređivanje dobivamo  $2a^2 + 4a = 0$ , odnosno  $2a(a + 2) = 0$ , 1 bod

iz čega slijedi  $a = 0$  ili  $a = -2$ . 2 boda

**Drugi slučaj.** Neka je  $m = n - 1$ , tj.  $3a^2 + 4a = a^2 - 1 - 1$ . 1 bod

Sređivanjem dobivamo

$$2a^2 + 4a + 2 = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$a^2 + a + a + 1 = 0$$

$$a(a + 1) + (a + 1) = 0$$

$$(a + 1)(a + 1) = 0, \quad 2 \text{ boda}$$

iz čega slijedi  $a = -1$ . 1 bod

Realni brojevi  $a$  za koje su  $m$  i  $n$  dva uzastopna cijela broja su  $a \in \{-2, -1, 0\}$ .

## Zadatak OŠ-8.2.

Trgovina će cijenu nekog proizvoda sniziti dva puta, najprije 1. ožujka za  $k$  %, a potom 15. ožujka za  $m$  %. Nakon drugog sniženja cijena treba iznositi 49 % početne cijene. Na koje se sve načine to može postići tako da  $k$  i  $m$  budu prirodni brojevi manji od 100?

**Rješenje.**

Neka je  $c$  početna cijena proizvoda.

Nakon prvog sniženja cijena proizvoda iznosi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right)$ . 1 bod

Nakon drugog niženja cijena proizvoda iznosi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{100}\right)$ . 2 boda

Prema uvjetu zadatka vrijedi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{100}\right) = 0.49c$ , odnosno

$$\frac{100 - k}{100} \cdot \frac{100 - m}{100} = 0.49. \quad 1 \text{ bod}$$

Neka je  $a = 100 - k$  i  $b = 100 - m$ .

Vrijedi  $\frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} = 0.49$ , odnosno  $a \cdot b = 4900$ , pri čemu su  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ , 1 bod

Rastav broja 4900 na proste faktore glasi  $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ . 1 bod

Djelitelji broja 4900 manji od 100 su 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 49, 50, 70, 98.

Uređeni parovi  $(a, b)$  koji zadovoljavaju uvjet  $a \cdot b = 4900$  su  $(50, 98)$ ,  $(98, 50)$  i  $(70, 70)$ . 3 boda

Za  $(a, b) = (50, 98)$  je  $k = 50$  i  $m = 2$ .

Za  $(a, b) = (98, 50)$  je  $k = 2$  i  $m = 50$ .

Za  $(a, b) = (70, 70)$  je  $k = m = 30$ .

Trgovina može sniženje postići na tri načina:

- najprije snizi cijenu proizvoda za 50 %, a zatim za 2 %
  - najprije snizi cijenu proizvoda za 2 %, a zatim za 50 %
  - najprije snizi cijenu proizvoda za 30 %, a zatim za 30 %.
- 1 bod

**Zadatak OŠ-8.3.**

Odredi sve proste brojeve  $p$  za koje je i  $p^2 + 2$  prost broj.

**Rješenje.**

Neka je  $p = 2$ . Tada je  $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ , pa je zadani izraz složen broj. 1 bod

Neka je  $p = 3$ . Tada je  $3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ , pa je zadani izraz prost broj. 1 bod

Neka je  $p > 3$  prost broj.

Tada  $p$  nije djeljiv s 3, pa mora biti oblika  $p = 3k + 1$  ili  $p = 3k + 2$ , gdje je  $k \in \mathbb{N}$ .

Za  $p = 3k + 1$  slijedi

$$\begin{aligned} p^2 + 2 &= (3k + 1)^2 + 2 & 1 \text{ bod} \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 & 1 \text{ bod} \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1). \end{aligned}$$

Dobiveni je izraz djeljiv brojem 3, pa nije prost broj. 2 boda

Za  $p = 3k + 2$  slijedi

$$\begin{aligned} p^2 + 2 &= (3k + 2)^2 + 2 && 1 \text{ bod} \\ &= 9k^2 + 12k + 4 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 && 1 \text{ bod} \\ &= 3(3k^2 + 4k + 2). \end{aligned}$$

Dobiveni je izraz djeljiv brojem 3, pa nije prost broj.

2 boda

Dakle,  $p = 3$  je jedino rješenje.

#### Zadatak OŠ-8.4.

Dokaži da svi četverokuti  $ABCD$  za koje vrijedi

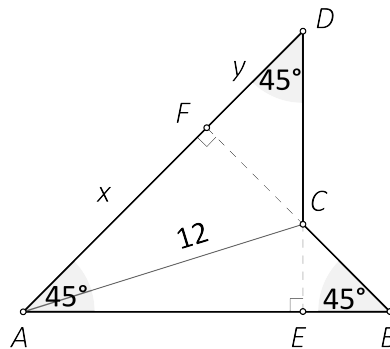
$$|\angle BAD| = |\angle CBA| = |\angle ADC| = 45^\circ$$

i  $|AC| = 12$  imaju jednaku površinu.

#### Prvo rješenje.

Pravac  $DC$  siječe  $\overline{AB}$  u točki  $E$ . Pravac  $BC$  siječe  $\overline{AD}$  u točki  $F$ .

Neka je  $|AF| = x$ ,  $|FD| = y$  i  $|AC| = 12$ .



Kako je  $|\angle BAD| = |\angle CBA| = 45^\circ$ , slijedi da je  $ABF$  jednakokračan trokut,

1 bod

iz čega slijedi  $|BF| = x$ .

1 bod

Kako je  $|\angle AFB| = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ ,

1 bod

slijedi da je  $|\angle DFC| = 90^\circ$  te iz  $|\angle FDC| = 45^\circ$  slijedi  $|\angle DCF| = 45^\circ$ ,

1 bod

pa i trokut  $CDF$  jednakokračan,

1 bod

iz čega slijedi  $|FC| = y$ .

1 bod

Trokut  $ACF$  je pravokutan trokut, pa je prema Pitagorinom poučku  $x^2 + y^2 = 12^2$ .

1 bod

Površina četverokuta  $ABCD$  jednaka je zbroju površina pravokutnih trokuta  $ABF$  i  $CDF$ . Stoga vrijedi

$$P(ABCD) = P(ABF) + P(CDF) \quad 1 \text{ bod}$$

$$= \frac{x \cdot x}{2} + \frac{y \cdot y}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

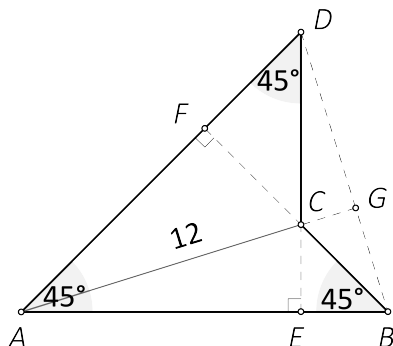
$$= \frac{12^2}{2} = \frac{144}{2} = 72. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka ima površinu 72.

Napomena: Analogno se može promatrati pravokutne trokute  $AED$  i  $BCE$ .

### Drugo rješenje.

Neka je točka  $E$  sjecište pravaca  $AB$  i  $CD$ , točka  $F$  sjecište pravaca  $AD$  i  $BC$ , a točka  $G$  sjecište pravaca  $AC$  i  $BD$ .



Za svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka vrijede sljedeće tvrdnje.

Trokut  $AED$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|AE| = |ED|$ . 1 bod

Trokut  $ABF$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|AF| = |BF|$ . 1 bod

Trokut  $CDF$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|FD| = |FC|$ . 1 bod

Trokuti  $ACF$  i  $BDF$  su pravokutni i duljine kateta su im jednake, pa su oni sukladni. 1 bod

Zbog toga je  $|DB| = |AC| = 12$ . 1 bod

Dužine  $\overline{BF}$  i  $\overline{DE}$  su dvije visine trokuta  $ABD$ , a njihovo sjecište, točka  $C$ , ortocentar je tog trokuta. 1 bod

Budući da točka  $G$  pripada stranici  $\overline{BD}$ , a dužina  $\overline{AG}$  sadrži točki  $C$ , zaključujemo da je dužina  $\overline{AG}$  visina trokuta  $ABD$ , a dužina  $\overline{CG}$  visina trokuta  $BDC$ . 1 bod

Površina četverokuta  $ABCD$  jednaka je razlici površina trokuta  $ABD$  i  $BDC$ , pa je

$$\begin{aligned}
 P_{ABCD} &= P_{ABD} - P_{BDC} && 1 \text{ bod} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |AG| - \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |CG| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot (|AG| - |CG|) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |AC| && 1 \text{ bod} \\
 &= \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 && 1 \text{ bod}
 \end{aligned}$$

Dakle, svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka ima površinu 72.

### Zadatak OŠ-8.5.

Koliko ima peteroznamenastih brojeva u čijem se zapisu koriste tri različite znamenke, a nijedna se znamenka ne pojavljuje više od dva puta?

### Prvo rješenje.

- Broj je peteroznamenkast, pa se točno dvije znamenke pojavljuju dva puta, a treća samo jednom. 1 bod
- Mjesto na koje će doći znamenka koja se pojavljuje točno jednom biramo na 5 načina. 1 bod
- Preostaje četiri mjesta te biramo na koja dva mjesta će biti iste znamenke. To možemo na jedan od tri načina: *aabb*, *abab* i *abba*. 2 boda
- Dakle, imamo  $5 \cdot 3 = 15$  načina za odabrati na kojim mjestima će biti iste znamenke. 1 bod
- Znamenku na mjestu desettisućica (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo odabrati na 9 načina jer ta znamenka ne može biti 0. 1 bod
- Prvu sljedeću znamenku na najvećoj mjesnoj vrijednosti (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo također odabrati na 9 načina jer mora biti različita od prethodne. 1 bod
- Preostalu znamenku (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo odabrati na 8 načina jer mora biti različita od prethodne dvije. 1 bod
- Dakle, tri različite znamenke koje koristimo u peteroznamenkastom broju biramo na  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  načina. 1 bod
- Ukupno ima  $30 \cdot 648 = 9720$  traženih peteroznamenkastih brojeva. 1 bod

### Drugo rješenje.

- Broj je peteroznamenkast, pa se točno dvije znamenke pojavljuju dva puta, a treća samo jednom. 1 bod
- Prvi slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji ne sadrže nulu.
- Znamenku koja se pojavljuje jednom možemo odabrati i smjestiti na odgovarajuće dekadsko mjesto na  $9 \cdot 5$  načina.
- Za najveću slobodnu mjesnu vrijednost biramo znamenku na 8 načina, a na 3 načina biramo drugo dekadsko mjesto te iste znamenke.
- Potom na 7 načina biramo znamenku za preostala dva mjesta.
- Ukupno, traženih brojeva koji ne sadrže nulu ima  $9 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 = 7560$ . 3 boda
- Drugi slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji sadrže točno jednu nulu.
- Nulu možemo rasporediti na 4 mjesta (jer ne može biti na vodećem mjestu).
- Za najveću slobodnu mjesnu vrijednost biramo znamenku na 9 načina, a potom na 3 načina biramo drugo mjesto te iste znamenke.
- Na kraju, na 8 načina biramo koja znamenku za preostala dva mjesta.
- Ukupno, traženih brojeva koji sadrže jednu nulu ima  $4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 8 = 864$ . 2 boda
- Treći slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji sadrže točno dvije nule.
- Osim nule pojavljuju se dvije znamenke. Vodeću znamenku biramo na 9 načina, a preostalu znamenku različitu od nule na 8 načina. 1 bod
- Razlikujemo dvije mogućnosti ovisno o tome pojavljuje li se vodeća znamenka jednom ili dvaput.

Ako se vodeća znamenka pojavljuje jednom, onda dvije nule možemo rasporediti na  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  mjesta, jer niti jedna od njih ne može biti na vodećem mjestu, a njihovom međusobnom zamjenom se ne dobiva novi broj. Znamenku za preostala dva mjesta biramo na 8 načina, pa u tom slučaju imamo  $9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$  takva broja.

1 bod

Ako se vodeća znamenka pojavljuje dvaput, onda na 4 načina biramo drugo mjesto za tu znamenku. Mjesto za znamenku koja se javlja jednom biramo na 3 načina, a na preostala dva mjesta moraju biti nule, pa u ovom slučaju imamo  $9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 = 864$  takva broja.

1 bod

Konačno, broj traženih peteroznamenkastih brojeva je  $7560 + 864 + 432 + 864 = 9720$ .

1 bod

**Napomena:** U drugom rješenju promatramo tri slučaja, koji redom nose 3 boda, 2 boda i 3 boda. U svakom od tih slučajeva moguće je kao u prvom rješenju posebno prebrojiti koliko ima odabira znamenki i koliko ima odabira pozicija na kojima su iste znamenke, pa ta dva broja pomnožiti. Odabir znamenki redom po slučajevima nosi 2 boda, 1 bod i 1 bod, dok odabir pozicija na kojima su iste znamenke nosi redom 1 bod, 1 bod i 2 boda.