

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak OŠ-7.1.

U jednoj se tiskari rabe dvije vrste tiskarskih pisača, a trenutno svi tiskaju istu knjigu. Šest pisača prve vrste ispiše 18 knjiga za 4 sata, a pet pisača druge vrste ispiše 5 knjiga za 12 sati. Koliko bi ukupno knjiga ispisalo 15 pisača prve vrste i 6 pisača druge vrste za 280 sati?

Rješenje.

Šest pisača prve vrste za 4 sata ispiše 18 knjiga.

Tri pisača prve vrste za 4 sata ispišu $18 : 2 = 9$ knjiga.

1 bod

Stoga, 15 pisača prve vrste za 4 sata ispiše $9 \cdot 5 = 45$ knjiga.

1 bod

Konačno, 15 pisača prve vrste za 280 sati ispiše $45 \cdot 70 = 3150$ knjiga.

2 boda

Pet pisača druge vrste za 12 sati ispiše 5 knjiga.

Jedan pisač druge vrste za 12 sati ispiše jednu knjigu.

1 bod

Stoga, 6 pisača druge vrste za 12 sati ispiše 6 knjiga,

1 bod

te 6 pisača druge vrste za 4 sata ispiše 2 knjige.

1 bod

Konačno, 6 pisača druge vrste za 280 sati ispiše $2 \cdot 70 = 140$ knjiga.

2 boda

Dakle, 15 pisača prve vrste i 6 pisača druge vrste za 280 sati ispiše ukupno $3150 + 140 = 3290$ knjiga.

1 bod

Zadatak OŠ-7.2.

Za prirodne brojeve a , b i c vrijedi $D(a, b) = 6$, $D(a, c) = 21$ i $V(b, c) = 840$. Odredi sve moguće vrijednosti broja b .

Napomena. $D(m, n)$ je najveći zajednički djelitelj, a $V(m, n)$ najmanji zajednički višekratnik brojeva m i n .

Rješenje.

Iz $D(a, b) = 6$ i $D(a, c) = 21$ zaključujemo da je a djeljiv brojevima 2, 3 i 7. 1 bod

Broj b je djeljiv brojem 6, ali nije djeljiv brojem 7 jer bi inače $D(a, b)$ bio barem 42. 2 boda

Broj c je djeljiv brojem 21, ali nije djeljiv brojem 2 jer bi inače $D(a, c)$ bio barem 42. 2 boda

Rastav broja 840 na proste faktore je $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. 1 bod

Budući da vrijedi $V(b, c) = 840$ i c nije djeljiv s 2, slijedi da je b djeljiv s $2^3 = 8$. 2 boda

Također, b je djeljiv s 3, ali ne i sa 7, pa b može biti

$$b = 8 \cdot 3 = 24$$

1 bod

ili

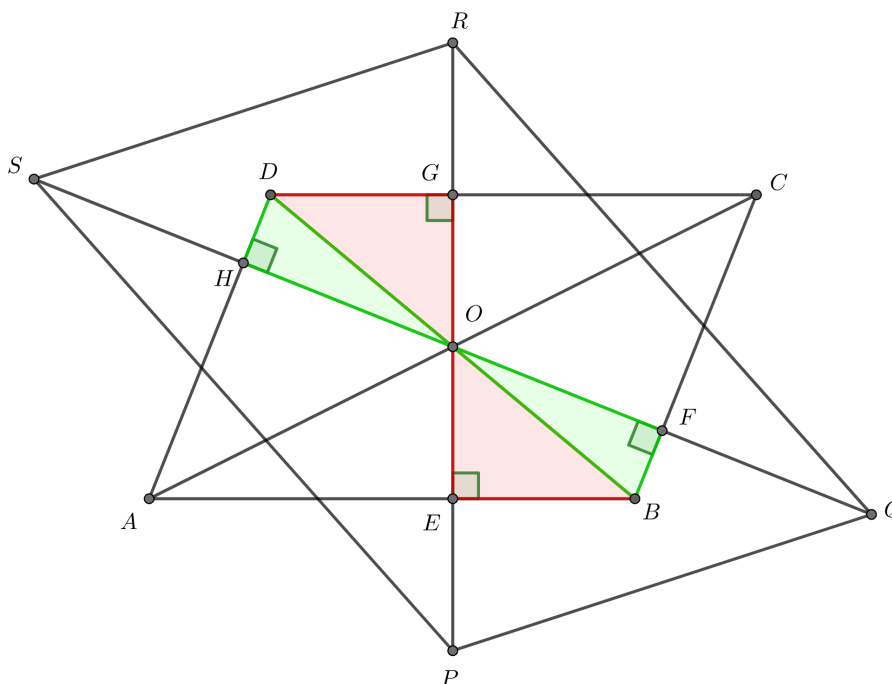
$$b = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

1 bod

Zadatak OŠ-7.3.

Dijagonale paralelograma $ABCD$ sijeku se u točki O . Neka su P , Q , R i S redom osnosimetrične slike točke O u odnosu na pravce AB , BC , CD i DA . Dokaži da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

Rješenje.



U paralelogramu se dijagonale raspolavljaju, pa je $|AO| = |OC|$ i $|BO| = |OD|$. 1 bod

Točke P i R su osnosimetrične slike točke O obzirom na pravce AB i CD , pa je $PO \perp AB$ i $OR \perp CD$. 1 bod

Kako su AB i CD usporedni pravci, slijedi da točke P , O i R pripadaju istom pravcu. 1 bod

Slično zaključujemo da je $O \in QS$, a pravac QS je okomit na pravce BC i DA . 1 bod

Neka je E presjek pravca PR s pravcem AB i G presjek pravca PR s pravcem CD .

Promotrimo trokute BOE i DOG . Vrijedi:

- $|\sphericalangle BEO| = |\sphericalangle DGO| = 90^\circ$,
- $|BO| = |OD|$,
- $|\sphericalangle EOB| = |\sphericalangle GOD|$ jer su to vršni kutovi.

Stoga su trokuti BOE i DOG sukladni prema poučku K-S-K. 1 bod

Iz sukladnosti trokuta slijedi $|EO| = |OG|$. 1 bod

Zbog osne simetrije slijedi $|PO| = 2|EO| = 2|OG| = |OR|$, tj. točka O je polovište dužine $\overline{PR}$. 1 bod

Neka je F presjek pravca QS s pravcem BC i H presjek pravca QS s pravcem DA .

Slično kao gore zaključujemo da su trokuti BFO i DHO također međusobno sukladni i vrijedi $|FO| = |OH|$. 1 bod

Slijedi $|QO| = |OS|$, tj. točka O je polovište dužine $\overline{QS}$. 1 bod

Dakle, dijagonale $\overline{PR}$ i $\overline{QS}$ četverokuta $PQRS$ se raspolavljaju, pa je taj četverokut paralelogram. 1 bod

Zadatak OŠ-7.4.

Na koliko se načina po jedna bijela, plava, zelena, smeđa i tri crvene stolice mogu rasporediti u niz (jedna do druge) tako da svake dvije susjedne stolice budu različitih boja? Stolice se razlikuju samo po boji.

Prvo rješenje.

Na raspolaganju su 3 crvene stolice i 4 stolice ostalih boja, ukupno 7 stolica.

Označimo crvene stolice slovom C, a ostale stolice slovom X.

Ispišimo kako se crvene stolice mogu rasporediti u odnosu na ostale stolice.

Prvo ispisujemo sve mogućnosti u kojima su prva i treća stolica u nizu crvene. 1 bod

To su: CXCXCXX, CXCXXCX, CXCXXXC 1 bod

Nakon toga ispisujemo ostale mogućnosti u kojima je prva stolica crvena. 1 bod

To su: CXXCXCX, CXXCXXC, CXXXCXC 1 bod

Konačno ispisujemo mogućnosti u kojima prva stolica nije crvena. 1 bod

To su: XCXCXCX, XCXXCXC, XCXCXXC, XXCXCXC 1 bod

Ukupno ima 10 rasporeda.

Međusobnom zamjenom crvenih stolica (C) unutar bilo kojeg od ovih rasporeda nećemo dobiti novi raspored jer su crvene stolice iste. Međutim, zamjenom bilo koje dvije od ostalih stolica (X) dobit ćemo novi raspored jer su te stolice sve međusobno različite.

Stolice bijele, plave, zelene i smeđe boje mogu se rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 2 boda

Ukupno, broj traženih rasporeda stolica iznosi $10 \cdot 24 = 240$. 2 boda

Napomena: Moguće je razmišljati i u obrnutom smjeru. Prvo rasporedimo necrvene stolice na 24 načina, što nosi 2 boda, pa nakon toga pokažemo da se crvene stolice mogu rasporediti na 10 načina, što nosi 6 bodova. Zaista, četiri necrvene stolice određuju pet praznina (prije prve stolice, nakon prve stolice, nakon druge stolice, nakon treće stolice i nakon četiri stolice) od kojih trebamo odabrati tri u koje stavljamo crvene stolice. Dovoljno je odabrati dvije od tih pet praznina u koje nećemo staviti crvene stolice, a to možemo na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina.

Drugo rješenje.

Na raspolaganju imamo 3 crvene i po jednu bijelu, plavu, zelenu i smeđu stolicu.

Označimo ih C, C, C, B, P, Z, S.

Sedam različitih stolica možemo rasporediti na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ načina.

No, kako su tri crvene stolice iste, taj broj treba umanjiti onoliko puta na koliko se načina mogu ispremještati tri crvene stolice, a to je $3 \cdot 2 \cdot 1$. 2 boda

Dakle, broj svih rasporeda stolica je

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 840. \quad 2 \text{ boda}$$

Od tog broja treba oduzeti broj rasporeda u kojima se crvene stolice nalaze jedna do druge. Prebrojimo te rasporede.

Prvo prebrojimo koliko ima rasporeda u kojima su sve tri crvene stolice zajedno, odnosno broj rasporeda niza (CCC), B, P, Z, S. Ima ih $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. 1 bod

Prebrojimo sada koliko ima rasporeda u kojima su dvije crvene stolice zajedno, a treća nije kraj njih. Neka je (CC) par crvenih stolica koje u rasporedu stoje zajedno. Treba rasporediti niz (CC), C, B, P, Z, S tako da (CC) i C ne budu zajedno.

Broj rasporeda tog niza je $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. 1 bod

Međutim, ovdje smo dvaput prebrojali one rasporede u kojima su sve tri crvene stolice zajedno (kao (CC)C i C(CC)), pa taj broj moramo oduzeti. 1 bod

Dakle, broj rasporeda u kojima se točno dvije crvene stolice nalaze jedna do druge je

$$720 - 2 \cdot 120 = 480. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno, broj različitih rasporeda stolica koji su u skladu s uvjetom zadatka je

$$840 - 120 - 480 = 240. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak OŠ-7.5.

Odredi sve uređene trojke (x, y, z) racionalnih brojeva za koje vrijede jednakosti

$$xy = z - x - y$$

$$yz = x - y - z$$

$$zx = y - z - x.$$

Prvo rješenje.

Zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo $x(y + z) = -2x$, odnosno

$$x(y + z + 2) = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno dobivamo

$$y(z + x + 2) = 0, \quad \text{i} \quad z(x + y + 2) = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Ako je $x = 0$, tada iz prve polazne jednadžbe vidimo da je $y = z$. 1 bod

Uvrštavanjem u drugu polaznu jednadžbu dobivamo $y^2 = -2y$,

pa je $y = z = 0$ ili $y = z = -2$. 2 boda

Analogno zaključujemo ako je $y = 0$ ili $z = 0$.

Stoga, ako je barem jedan od x, y, z jednak 0, rješenja su

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (-2, -2, 0), (-2, 0, -2), (0, -2, -2)\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Inače, ako niti jedan od x, y i z nije 0, onda dobivamo sustav

$$y + z + 2 = 0,$$

$$z + x + 2 = 0,$$

$$x + y + 2 = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

čije je jedino rješenje $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$. 2 boda

Drugo rješenje.

Iz $xy = z - x - y$ slijedi

$$xy + x + y = z$$

$$xy + x + y + 1 = z + 1$$

$$(x + 1)(y + 1) = z + 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno, dobivamo

$$(y + 1)(z + 1) = x + 1 \quad \text{i} \quad (z + 1)(x + 1) = y + 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Množenjem dobivenih jednadžbi dobivamo

$$(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 = (x + 1)(y + 1)(z + 1). \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da vrijedi

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 0 \quad \text{ili} \quad (x+1)(y+1)(z+1) = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Prvi slučaj.

Iz $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$ slijedi $x = -1$ ili $y = -1$ ili $z = -1$.

Ako je $x = -1$, iz $(x+1)(y+1) = z+1$ slijedi $z = -1$.

Tada iz $(z+1)(x+1) = y+1$ slijedi $y = -1$.

Slično dobivamo za pretpostavke $y = -1$ ili $z = -1$, pa je u ovom slučaju jedino rješenje $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$. 1 bod

Drugi slučaj.

Iz $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$ i $(x+1)(y+1) = z+1$ slijedi $(z+1)(z+1) = 1$, tj. $(z+1)^2 = 1$.

Stoga je $z+1 = 1$ ili $z+1 = -1$, odnosno $z = 0$ ili $z = -2$. 1 bod

Za $z = 0$, iz $(z+1)(x+1) = y+1$ dobivamo $x = y$.

Tada iz $(x+1)(y+1) = z+1$ slijedi $x = y = -2$. 1 bod

Za $z = -2$, iz $(z+1)(x+1) = y+1$ dobivamo $x + y + 2 = 0$.

Tada iz $(x+1)(y+1) = z+1$ slijedi $xy = 0$, tj. $x = 0$ ili $y = 0$. 1 bod

Jedine trojke (x, y, z) koje zadovoljavaju uvjet $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$ su $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$, $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$. 2 boda

Treće rješenje.

Kao u prethodnom rješenju dobivamo $(x+1)(y+1) = z+1$, $(y+1)(z+1) = x+1$ i $(z+1)(x+1) = y+1$. 2 boda

Množenjem prve jednadžbe sa $z+1$, druge s $x+1$, a treće s $y+1$, dobivamo

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)^2 = (y+1)^2 = (z+1)^2.$$

Slijedi da je $|x+1| = |y+1| = |z+1|$. 1 bod

Također, kao u prethodnom rješenju dobivamo da izraz $(x+1)(y+1)(z+1)$ ima vrijednost 0 ili 1. 2 boda

Iz $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$ i $|x+1| = |y+1| = |z+1|$ slijedi $x = y = z = -1$. 1 bod

Iz $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$ i $|x+1| = |y+1| = |z+1|$ slijedi $|x+1| = |y+1| = |z+1| = 1$. 1 bod

Dakle, za svaki od brojeva x , y i z vrijedi da su jednaki 0 ili -2 . 1 bod

Zbog uvjeta $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$ ili je jedna zagrada pozitivna i dvije negativne ili su sve tri pozitivne, pa jedine trojke (x, y, z) koje zadovoljavaju uvjet su $(0, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$, $(-2, 0, -2)$, $(-2, -2, 0)$. 2 boda