

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

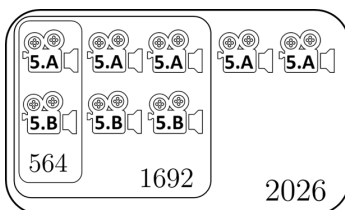
AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak OŠ-5.1.

Učenici 5.a i 5.b snimili su dva filma o sportskim uspjesima svojih razreda. Na početku su filmovi imali ukupno 564 pregleda. Nakon što su podijeljeni na društvenim mrežama, broj pregleda filma 5.a povećao se 5 puta, a broj pregleda filma 5.b povećao se 3 puta, pa su zajedno imali 2026 pregleda. Koliko je pregleda imao svaki od filmova prije dijeljenja na društvenim mrežama?

Prvo rješenje.

Da su oba filma imala tri puta veći broj pregleda, ukupan broj bi bio $3 \cdot 564 = 1692$. 2 boda



Razlika $2026 - 1692 = 334$ predstavlja dvostruki broj pregleda filma 5.a razreda prije početka dijeljenja na društvenim mrežama. 4 boda

Slijedi da broj pregleda filma 5.a razreda na početku iznosio $334 : 2 = 167$. 2 boda

To znači da je početni broj pregleda filma 5.b bio $564 - 167 = 397$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je a broj pregleda filma 5.a razreda. Tada broj pregleda filma 5.b razreda na početku iznosi $564 - a$. 2 boda

Nakon povećanja pregleda filma 5.a razreda pet puta i pregleda filma 5.b tri puta ukupno je 2026 pregleda, odnosno vrijedi $5a + 3 \cdot (564 - a) = 2026$. 2 boda

Sređivanjem dobivamo

$$5a + 1692 - 3a = 2026 \quad 1 \text{ bod}$$

$$2a = 2026 - 1692 \quad 1 \text{ bod}$$

$$2a = 334 \quad 1 \text{ bod}$$

$$a = 167 \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, broj pregleda filma 5.a na početku je 167.

Tada je $b = 564 - 167 = 397$ broj pregleda filma 5.b na početku. 2 boda

Zadatak OŠ-5.2.

Odredi sve parove znamenki a i b za koje je umnožak brojeva $\overline{65a}$ i $\overline{4b8}$ djeljiv brojem 60.

Rješenje.

Rastavimo broj 60 na proste faktore: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Umnožak dva broja je djeljiv sa 60 ako su u njegovom rastavu na proste faktore dvije dvojke, jedna trojka i jedna petica. Ti prosti brojevi moraju biti djelitelji barem jednog od faktora u umnošku.

1 bod

Broju $\overline{4b8}$ posljednja je znamenka 8, pa broj $\overline{65a}$ mora biti djeljiv s 5.

Broj je djeljiv s 5, ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5. Slijedi da je $a \in \{0, 5\}$.

1 bod

Prvi slučaj. Ako je $a = 0$, onda je prvi broj 650 i on je djeljiv i brojem 2 i brojem 5.

1 bod

Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3.

Broj 650 nije djeljiv s 3 (jer $6+5+0=11$ nije višekratnik od 3).

Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4, tj. ako mu je dvoznamenkasti završetak 00, 04, 08, 12, 16, ..., 92, 96. Broj 650 nije djeljiv s 4 jer 50 nije višekratnik broja 4.

1 bod

Stoga broj $\overline{4b8}$ mora biti djeljiv s 2 i 3.

1 bod

Broj je djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8, pa je $\overline{4b8}$ djeljiv s 2 za bilo koji odabir znamenke b .

No, zbog uvjeta djeljivosti s 3 i zato što vrijedi $4+b+8 = 12+b$, vrijedi $b \in \{0, 3, 6, 9\}$.

1 bod

Drugi slučaj. Ako je $a = 5$, onda je prvi broj 655 i on je djeljiv s 5, ali nije ni s 2 (posljednja znamenka je 5) ni s 3 ($6+5+5 = 16$ nije višekratnik broja 3).

1 bod

Stoga broj $\overline{4b8}$ mora biti djeljiv sa 4 i 3 (dvije dvojke i trojka u rastavu broja 60)

1 bod

Broj $\overline{4b8}$ je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak 08, 28, 48, 68 ili 88 pa je $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

1 bod

No, zbog uvjeta djeljivosti s 3 zbroja $4+b+8 = 12+b$ znamenke 2, 4 i 8 u zbroju ne daju višekratnik od 3 pa je $b \in \{0, 6\}$.

1 bod

Traženi parovi znamenaka a i b su $(a, b) \in \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), (0, 9), (5, 0), (5, 6)\}$.

Zadatak OŠ-5.3.

Cvita svakoga dana bere rajčice u svom vrtu. Drugog je dana ubrala onoliko rajčica koliko ih je ubrala prvog dana i još dvije trećine tog broja. Trećeg je dana ubrala koliko i drugog dana i još četvrtinu tog broja. Četvrtog je dana ubrala koliko i trećeg dana i još petinu tog broja. Petog je dana ubrala koliko i četvrtog dana i još šestinu tog broja. Ako je petog dana ubrala 210 rajčica, koliko je ukupno rajčica ubrala u tih pet dana?

Prvo rješenje.

Razmotrimo situaciju od petog dana unatrag.

Petog je dana Cvita ubrala 210 rajčica.

Rajčice koje je Cvita ubrala petog dana možemo prikazati kao osjenčani dio na slici, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih četvrtog dana.



Budući da je osjenčano 7 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela $210 : 7 = 30$, pa je četvrtog dana ubrano $6 \cdot 30 = 180$ rajčica.

3 boda

Na sličan način prikazujemo rajčice koje ubrala četvrtog dana, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubran trećeg dana.



Budući da je osjenčano 6 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela $180 : 6 = 30$, pa je trećeg dana ubrala $5 \cdot 30 = 150$ rajčica.

2 boda

Rajčice koje je ubrala trećeg dana prikazujemo sljedećom slikom, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih drugog dana.



Budući da je osjenčano 5 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela $150 : 5 = 30$, pa je drugog dana ubrala $4 \cdot 30 = 120$ rajčica.

2 boda

Konačno, 120 rajčica koje je ubrala drugog dana možemo prikazati sljedećom slikom, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih prvog dana.



Budući da je osjenčano 4 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela $120 : 4 = 30$, pa je prvog dana ubrala $3 \cdot 30 = 90$ rajčica.

2 boda

Cvita je ukupno ubrala $72 + 120 + 150 + 180 + 210 = 732$ rajčice.

1 bod

Napomena: Učenik koji, umjesto grafički, na bilo koji način izračuna i obrazloži broj rajčica ubranih pojedinog dana treba dobiti pripadne bodove. Za svaki od dana, učenik treba dobiti **1 bod** za zapisan broj rajčica, te ostale bodove za postupak/obrazloženje.

Drugo rješenje.

Prikažimo količinu rajčica koju je Cvita ubrala prvog dana pravokutnikom.



Drugog dana ubrala je količinu kao i prvog dana i još dvije trećine te količine. Stoga pravokutnik dijelimo na tri jednaka dijela, te mu dodajemo još dva takva dijela.

2 boda



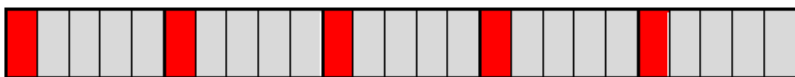
Trećeg dana je ubrala koliko i drugog dana i još četvrtinu tog broja. Svaki od pet dijelova dijelimo na četiri jednaka dijela kako bismo mogli odrediti broj dijelova koji prikazuju rajčice ubrane trećeg dana.



Imamo 20 jednakih dijelova, te je četvrtina od toga pet takvih dijelova. Zaključujemo da rajčice ubrane trećeg dana možemo prikazati s $20 + 5 = 25$ takvih dijelova.

2 boda

Četvrtog dana je ubrala koliko trećeg dana i još petinu od tog broja. Budući da ukupno ima 25 dijelova, prebrojavanjem zaključujemo da petinu čini pet takvih dijelova.



Stoga rajčice ubrane četvrtog dana prikazujemo s $25 + 5 = 30$ takvih dijelova.

1 bod

Petog dana je ubrala koliko i četvrtog dana i još šestinu tog broja. Budući da ukupno ima 30 dijelova, prebrojavanjem zaključujemo da šestinu čini pet takvih dijelova.



Stoga rajčice ubrane četvrtog dana prikazujemo s $30 + 5 = 35$ takvih dijelova.

1 bod

Budući da znamo da je petog dana ubrano ukupno 210 rajčica, svaki dio predstavlja $210 : 35 = 6$ rajčica.

1 bod

Četvrtog dana je bilo ukupno 30 dijelova, tj. $30 \cdot 6 = 180$ rajčica.

Trećeg dana je bilo ukupno 25 dijelova, tj. $25 \cdot 6 = 150$ rajčica.

Drugog dana je bilo ukupno 20 dijelova, tj. $20 \cdot 6 = 120$ rajčica.

1 bod

Prvog dana je bilo ukupno 12 takvih dijelova, tj. $12 \cdot 6 = 72$ rajčice.

1 bod

Cvita je ukupno ubrala $72 + 120 + 150 + 180 + 210 = 732$ rajčice.

1 bod

Napomena: Od učenika se ne očekuje da računaju s razlomcima, ali se algebarski pristup može bodovati na sljedeći način. Ako broj rajčica ubranih prvog dana označimo s x , onda je drugog dana ubrano $\frac{5}{3}x$ (2 boda), trećeg dana $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3}x = \frac{25}{12}x$ (2 boda), četvrtog dana $\frac{6}{5} \cdot \frac{25}{12}x = \frac{5}{2}x$ (1 bod), te petog dana $\frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2}x = \frac{35}{12}x$ (1 bod).

Iz $\frac{35}{12}x = 210$ dobivamo $x = 72$ (2 boda), pa je drugog dana ubrano 120, trećeg 150 i četvrtog 180 rajčica (1 bod), a ukupno su ubrane 732 rajčice (1 bod).

Zadatak OŠ-5.4.

Pravokutni zid širine 532 cm i visine 266 cm oblaže se pravokutnim pločicama opsega 96 cm čija je dulja stranica tri puta veća od kraće. Pločice se postavljaju tako da su im dulje stranice međusobno usporedne. Između susjednih pločica ostavlja se razmak širine 2 cm, a između svih rubnih pločica i rubova zida po 1 cm. Koliko će redova pločica biti postavljeno i koliko će ukupno pločica biti upotrijebljeno za prekrivanje cijelog zida?

Prvo rješenje.

Označimo duljinu kraće stranice pločice sa x . Tada je dulja stranica, koja je tri puta veća, $3x$, pa je opseg pločice $x + 3x + x + 3x = 96$ cm, odnosno vrijedi $8x = 96$. Stoga, duljina kraće stranice iznosi $x = 96 : 8 = 12$ cm, a dulje stranice $3x = 3 \cdot 12 = 36$ cm. 2 boda

Razmak od 2 cm između pločica, odnosno od 1 cm između pločice i ruba možemo ostvariti tako da zamislimo da smo pločicu sa svake strane proširili s 1 cm razmaka, te zapravo slažemo tako proširene pločice dimenzija $14 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}$ bez razmaka. 2 boda

Površina zida iznosi $532 \cdot 266 \text{ cm}^2$, a površina proširene pločice iznosi $38 \cdot 14 = 532 \text{ cm}^2$, pa je ukupno potrebno 266 pločica. 2 boda

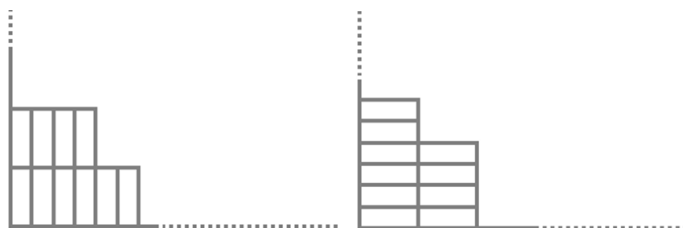
Visina zida je 266 cm. Ako pločice postavljamo tako da je visina proširene pločice 14 cm, tada je ukupan broj redova postavljenih pločica jednak količniku visine zida i visine pločice, tj. imamo $266 : 14 = 19$ redova. 2 boda

Analogno, ako pločice postavljamo tako da je visina proširene pločice 38 cm, tada je ukupan broj redova postavljenih pločica jednak $266 : 38 = 7$. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo da su dimenzije pločica 12 cm i 36 cm. 2 boda

Pločice se na zid mogu slagati na dva načina: usporedno visini zida duljom stranicom ili usporedno visini zida kraćom stranicom.



Prvi slučaj. Ako se pločice slažu usporedno visini zida duljom stranicom, onda visinu od 266 cm ostvarujemo kao zbroj

$$266 = 1 + 36 + 2 + 36 + 2 + \dots + 36 + 1,$$

pri čemu se pribrojnik 36 pojavljuje onoliko puta koliko ima redova pločica, a pribrojnik 2 jednom manje. Neka je broj redova r . Tada je $266 = 1 + 36r + 2(r - 1) + 1$, odnosno $266 = 38r$. Stoga je u ovom slučaju $r = 266 : 38 = 7$ redova pločica.

2 boda

Provjerimo da na takav način zaista možemo prekriti cijeli zid. Širinu zida od 532 cm ostvarujemo kao zbroj

$$532 = 1 + 12 + 2 + 12 + 2 + \dots + 12 + 1$$

pri čemu se pribrojnik 12 pojavljuje onoliko puta koliko ima stupaca pločica, a pribrojnik 2 jednom manje. Neka je broj stupaca s . Tada je $532 = 1 + 12s + 2(s - 1) + 1$, odnosno $532 = 14s$. Stoga je u ovom slučaju $s = 532 : 14 = 38$ stupaca pločica.

1 bod

Drugi slučaj. Ako se pločice slažu usporedno visini zida kraćom stranicom, onda visinu od 266 cm ostvarujemo kao zbroj

$$266 = 1 + 12 + 2 + 12 + 2 + \dots + 12 + 1.$$

Neka je broj redova r . Tada je $266 = 1 + 12r + 2(r - 1) + 1$, odnosno $266 = 14r$. Stoga je u ovom slučaju $r = 266 : 14 = 19$ redova pločica.

2 boda

Širinu zida od 532 cm ostvarujemo kao zbroj

$$532 = 1 + 36 + 2 + 36 + 2 + \dots + 36 + 1$$

Neka je broj stupaca s . Tada je $532 = 1 + 36s + 2(s - 1) + 1$, odnosno $532 = 38s$. Stoga je u ovom slučaju $s = 532 : 38 = 14$ stupaca pločica.

1 bod

Budući da vrijedi $7 \cdot 38 = 19 \cdot 14 = 266$, u oba slučaja je potrebno 266 pločica.

2 boda

Napomena: Uočimo li da razmaci do ruba zida od po 1 cm mogu biti brojeni kao jedan razmak od 2 cm te dodani posljednjoj pločici, onda je broj pločica jednak broju razmaka od 2 cm tj. broju redova po visini i broju stupaca po širini. Jednadžbe iz drugog rješenja tada odgovaraju izračunima $266 : (36 + 2) = 7$ redova i $532 : (12 + 2) = 38$ stupaca (prvi slučaj) te $266 : (12 + 2) = 19$ redova i $532 : (36 + 2) = 14$ stupaca (drugi slučaj), pa se bodovanje provodi analogno drugom rješenju.

Zadatak OŠ-5.5.

Koliko ima peteroznamenastih brojeva kojima zbroj triju znamenaka najvećih mjesnih vrijednosti iznosi 20, umnožak triju znamenaka najmanjih mjesnih vrijednosti iznosi 24, a sve su im znamenke različite?

Rješenje.

Broj 20 možemo zapisati kao zbroj tri različite znamenke (do na poredak pribrojnika) na sljedeće načine:

$$9 + 8 + 3, \quad 9 + 7 + 4, \quad 9 + 6 + 5, \\ 8 + 7 + 5. \quad 1 \text{ bod}$$

U prvom retku su mogućnosti u kojima je najveći pribrojnik 9, u drugom retku mogućnost u kojoj je najveći pribrojnik 8, te drugih mogućnosti nema jer je $7+6+5 = 18 < 20$. 1 bod

Iz rastava na proste faktore broja $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ dobivamo mogućnosti za zapis tog broja kao umnožak tri različite znamenke (do na poredak faktora) na sljedeće načine:

$$2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 1 \cdot 4 \cdot 6, \quad 1 \cdot 3 \cdot 8. \quad 2 \text{ boda}$$

Srednja znamenka u nekom od traženih peteroznamenkastih brojeva može biti samo ona znamenka koja se pojavljuje i u rastavu broja 20 na pribrojnike i u rastavu broja 24 na faktore, a to su znamenke 3, 4, 6 i 8. 1 bod

Pri ispisivanju mogućih brojeva s određenom srednjom znamenkom promatramo koje trojke brojeva (jedan zbroj i jedan umnožak) sadrže tu znamenku i nemaju drugih zajedničkih znamenki. 1 bod

Ako je srednja znamenka 3, imamo sljedeća četiri broja: 98324, 98342, 89324 i 89342. 1 bod

Ako je srednja znamenka 4, imamo osam brojeva: 97423, 97432, 97416, 97461, 79423, 79432, 79416, 79461. 1 bod

Ako je srednja znamenka 6, imamo četiri broja: 95641, 95614, 59641, 59614. 1 bod

Ako je srednja znamenka 8, imamo četiri broja: 75831, 75813, 57831, 57813. 1 bod

Ukupno ima $4 + 8 + 4 + 4 = 20$ traženih brojeva.

Napomena: Ako učenik navodi ili broji kao rješenja peteroznamenkaste brojeve u kojima se ponavljaju znamenke, može dobiti najviše **8 bodova**.

Za ostvarivanje bodova učenik ne mora ispisati sve brojeve u pojedinim slučajevima, već može objasniti koje znamenke se mogu birati na kojim mjestima i zapisati koliko se peteroznamenkastih brojeva dobiva.

Određivanje svih brojeva je moguće na više načina.

Učenik može prvo uočiti da srednja znamenka mora iznositi barem 3 jer u svakom zapisu broja 20 kao zbroj tri različite znamenke najmanja mora iznositi barem 3 (jer je $2 + 8 + 9 < 20$), što nosi **1 bod**. Također, srednja znamenka mora biti djeljitelj broja 24, pa srednja znamenka može biti samo 3, 4, 6 ili 8, što nosi još **1 bod**. Za svaku od te četiri mogućnosti određivanje preostalih mogućih znamenki nosi po **2 boda**.

Učenik može samo odrediti mogućnosti za zapis broja 20 kao zbroja tri različite znamenke, što nosi **2 boda**, pa nakon toga za svaku mogućnost ispitati koji pribrojnik može biti srednja znamenka, te odrediti preostale znamenke. U takvom pristupu svaka od četiri mogućnosti nosi po **2 boda**.

Učenik može samo odrediti mogućnosti za zapis broja 24 kao umnoška tri različite znamenke, što nosi **2 boda**, pa nakon toga za svaku mogućnost ispitati koji faktor može biti srednja znamenka, te odrediti preostale znamenke. U takvom pristupu **2 boda** nosi slučaj $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, a po **3 boda** nose slučajevi $24 = 1 \cdot 4 \cdot 6$ i $24 = 1 \cdot 3 \cdot 8$.